

LA RACINE CARREE

I- Généralité :

Les mathématiciens grecs ne connaissaient que les **nombre rationnels** (c'est-à-dire les quotients de nombres entiers) et ils avaient démontré qu'un **carré de côté 1** a une **diagonale** qui n'est pas un nombre rationnel ! Cela les plongea dans une grande perplexité.

On sait aujourd'hui qu'un carré de côté **1** a une diagonale dont la longueur exacte est $\sqrt{2}$. Le symbole $\sqrt{\quad}$, appelé **radical**, permet d'écrire certains nombres (les racines carrées) sous forme exacte et de calculer avec ces nombres. La notation actuelle, $\sqrt{\quad}$, date de la fin du **XV^e siècle** ; elle est due à l'Allemand **Michel Stifel**.

1- Définition :

Étant donné un nombre positif **a**, il existe un unique nombre positif dont le carré est égal à **a**. Ce nombre est appelé racine carrée de **a**, et noté \sqrt{a} .

Exemples :

$\sqrt{9} = 3$, car $3^2 = 9$ et **3** est positif

$\sqrt{2,56} = 1,6$, car $1,6^2 = 2,56$ et **1,6** est positif.

Autrement dit, si **a est positif**, \sqrt{a} est l'**unique nombre positif** tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.
Ainsi, $(\sqrt{3})^2 = 3$.

2- Application :

Calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle

Soit **RMP** un triangle rectangle en **R** tel que **MR = 3 m** et **RP = 2 m**. On veut calculer la valeur exacte de la longueur **MP**.

Le triangle **RMP** est rectangle en **R**, donc d'après la propriété de **Pythagore** :

$MP^2 = MR^2 + RP^2$, soit **$MP^2 = 3^2 + 2^2$** , d'où **$MP^2 = 13$** .

MP désigne une longueur, c'est donc un nombre positif. On en déduit que la valeur exacte de **MP** est **$\sqrt{13}m$** .

Construire un segment de longueur \sqrt{n} (**n** étant un entier naturel donné). On veut construire **par exemple** un segment de longueur **$\sqrt{3} cm$** .

On construit d'abord un triangle **ABC** rectangle en **B** et isocèle, tel que **$AB = BC = 1 cm$** .

L'application de la propriété de **Pythagore** dans ce triangle donne immédiatement **$\sqrt{2} cm$** .

On construit ensuite un triangle ACD rectangle en C tel que $CD = 1 \text{ cm}$.

D'après la propriété de **Pythagore** : $AD^2 = AC^2 + CD^2$, soit $AD = (\sqrt{2})^2 + 1^2$, d'où $AD^2 = 3$.

AD désigne un nombre positif, donc $\sqrt{3} \text{ cm}$.

Remarque : en réitérant ce procédé, on peut construire un segment de longueur \sqrt{n} , où n est un entier naturel quelconque.

On utilise les racines carrées en trigonométrie. Les racines carrées permettent d'exprimer les valeurs exactes du **sinus**, du **cosinus** ou de la **tangente** de certains **angles** particuliers.

Exemple : $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemple : Calculer la distance entre deux points du plan. Rappelons que si (O, I, J) est un repère orthonormé du plan et que $A(x, y)$ et $B(x', y')$ sont deux points du plan, la distance AB est donnée par la formule : $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$

Exemple : on veut connaître la distance EF avec $E(1, -2)$ et $F(3, 4)$ dans un repère orthonormal (O, I, J) du plan, l'unité étant le **centimètre**. On cherche la valeur exacte.

$$EF = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2}, \text{ soit } EF = \sqrt{4 + 36}, \text{ donc } EF = \sqrt{40}.$$

La valeur exacte de EF est donc $\sqrt{40} \text{ cm}$.

- Résoudre une équation :

On veut résoudre l'équation $x^2 = 7$. On peut montrer qu'elle admet deux solutions : $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

- Factoriser une expression :

Pour factoriser l'expression $x^2 - 5$, on utilise la définition de la racine carrée qui permet d'écrire : $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2$.

- **En utilisant l'identité** : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on obtient donc $x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$.

II- Calcul :

Deux formules permettent de transformer des expressions comportant plusieurs racines carrées.

Quelles sont ces formules en calcul numérique et en géométrie ?

1- Formules :

Pour tous nombres positifs a et b , on a les égalités suivantes : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ avec } b \neq 0.$$

$$\sqrt{b} \times b$$

Exemples : on veut simplifier $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ et $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{18}}$.

$$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{18}}$$

L'application directe des formules permet d'écrire : $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$ et $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{18}} =$

$$\frac{\sqrt{98}}{18} = \frac{\sqrt{49}}{9} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$$

Ces exemples montrent que le produit ou le quotient de **deux** nombres irrationnels peut être un nombre rationnel.

1- Simplifier une somme algébrique comportant des racines carrées :

On veut simplifier l'expression $A = \sqrt{27} - \sqrt{75} + \sqrt{3}$.

On transforme l'expression de la manière suivante : $A = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{3}$,

puis $A = \sqrt{9} \times \sqrt{3} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} + \sqrt{3}$, soit $A = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

En réduisant, on obtient $A = -\sqrt{3}$.

2- Développer une expression comportant des racines carrées :

On veut développer l'expression $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$. Le résultat sera donné sous la forme exacte la plus simple possible.

$B = (\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$, soit $B = 7 - 2 \times \sqrt{7 \times 3} + 3$, d'où $B = 7 - 2\sqrt{21} + 3$.

La valeur exacte de B est donc : $10 - 2\sqrt{21}$.

3- Application en géométrie :

Énoncé : soit $ABCD$ un rectangle tel que $AC = \sqrt{10}$ et $AD = \sqrt{2}$, l'unité étant le centimètre. On veut calculer la valeur exacte de DC et en déduire l'aire et le périmètre du rectangle $ABCD$. On donnera les résultats sous la forme exacte la plus simple possible.

Résolution : ABCD est un rectangle, donc le triangle ADC est rectangle en D. Appliquons la propriété de Pythagore : $AC^2 = AD^2 + DC^2$, soit $\sqrt{10^2} = \sqrt{2^2} + DC^2$, donc $DC^2 = 10 - 2 = 8$. DC désigne une longueur, c'est donc un nombre positif ; on en déduit que la valeur exacte de DC est $\sqrt{8}\text{cm}$.

Le périmètre du rectangle ABCD est donc : $2(AD + DC)$, soit $2(\sqrt{2} + \sqrt{8})$.

Simplifions :

$$2(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = 2(\sqrt{2} + \sqrt{4 \times 2}) = 2(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

La valeur exacte du périmètre du rectangle est donc $6\sqrt{2}\text{cm}$.

L'aire du rectangle ABCD est : $AD \times DC$, soit $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$. Or $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$.

La valeur exacte de l'aire du rectangle est donc 4 cm^2 .